Simplifications d'équations

Les équations des sorties (relais, électrovannes, lampes, etc.) doivent faire l'objet d'une simplification. Il s'agit de minimiser les coûts en simplifiant l'installation et en minimisant le matériel.

Plusieurs techniques existent (elles peuvent être complémentaires) :

- la simplification par le calcul ;
- L'utilisation des tableaux de Karnaugh ;
- L'utilisation de certaines fonctions logiques avancées telle la fonction OU Exclusif/*XOR*.

Nous verrons dans un premier temps la simplification par le calcul.

Simplifications par calcul 1/3

On tire profit des propriétés spécifiques de l'algèbre de Boole. On cherche à faire apparaître certaines figures de simplification :

$\bar{a} + a = 1$

$a + 1 = 1$

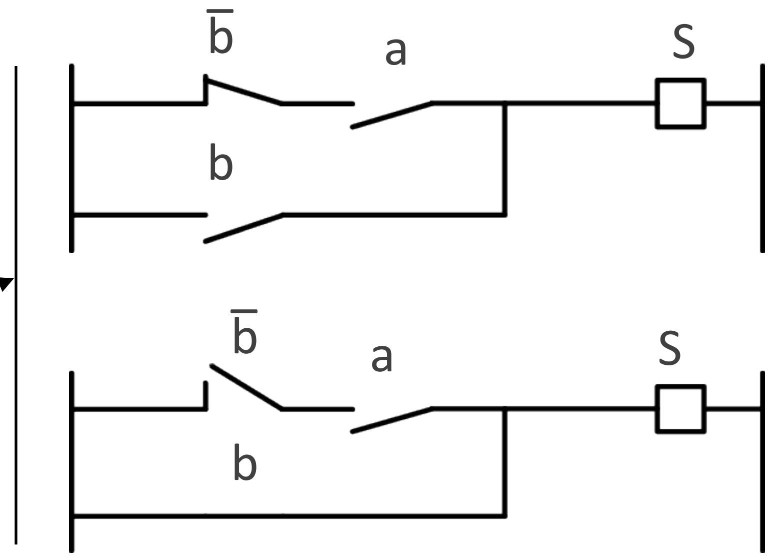
$a + a.x = a$ qqs x car $a.(x+1) = a.1 = a$ -- factorisation

$a.b + \bar{b} = a + \bar{b}$

$a.\bar{b} + b = a + b$

$\bar{a}.b + \bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$

$\bar{a}.\bar{b} + b = \bar{a} + b$



On fait apparaître ces figures de simplification par factorisation, développement, application des propriété d'associativité et distributivité.

Simplifications par calcul 2/3

$$A1 = \overline{a}.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d + a.b.c + a.\overline{b}.c$$

$$A1 = \overline{a}.\overline{c}\left(\overline{d} + b + \overline{b}.d\right) + a.c\left(b + \overline{b}\right)$$

$$or \quad \overline{b}.d + b = d + b$$

$$A1 = \overline{a}.\overline{c}(\overline{d} + d + b) + a.c$$

$$\boxed{A1 = \overline{a}.\overline{c} + a.c}$$

$$\boxed{\alpha}.\beta + \overline{\alpha} = \beta + \overline{\alpha}$$

$$\alpha.\boxed{\overline{\beta}} + \beta = \alpha + \beta$$

$$\overline{\alpha}.\boxed{\overline{\beta}} + \beta = \overline{\alpha} + \beta$$

$$\alpha.\boxed{\beta} + \overline{\beta} = \alpha + \overline{\beta}$$

Simplifications par calcul 3/3

$$A2 = \overline{b}.\overline{d}.\overline{e} + b.c.\overline{d} + b.d + b.\overline{c}.\overline{d} + b.\overline{c}.\overline{d}.e$$

$$A2 = \overline{b}.\overline{d}.\overline{e} + b.\overline{d}\left(c + \overline{c}\right) + b.d + b.\overline{c}.\overline{d}.e$$

$$A2 = \overline{b}.\overline{d}.\overline{e} + b\left(\overline{d} + d\right) + b.\overline{c}.\overline{d}.e$$

$$A2 = \overline{b}.\overline{d}.\overline{e} + b\left(1 + \overline{c}.\overline{d}.e\right) = \overline{b}.\overline{d}.\overline{e} + b$$

$$A2 = \overline{b}.\left(\overline{d}.\overline{e}\right) + b \equiv \overline{\beta}.\alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$\boxed{A2 = \overline{d}.\overline{e} + b}$$

$$\boxed{\alpha}.\beta + \overline{\alpha} = \beta + \overline{\alpha}$$

$$\alpha.\boxed{\overline{\beta}} + \beta = \alpha + \beta$$

$$\overline{\alpha}.\boxed{\overline{\beta}} + \beta = \overline{\alpha} + \beta$$

$$\alpha.\boxed{\beta} + \overline{\beta} = \alpha + \overline{\beta}$$

Tableau de Karnaugh (TK)

Un tableau de Karnaugh est tracé à partir de la table de vérité. Son nombre de lignes et de colonnes est toujours celui d'une puissance de 2 (2, 4, 8, 16...) . On utilise le **code Gray**.

Table de vérité

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tableau de Karnaugh

b

a		0	1
	0	0	1
	1	1	0

On reporte les valeurs de la sortie en fonction des combinaisons (produits) d'entrées.

L'équation de la sortie correspond aux sommes des produits ou S vaut 1 :

$$\boxed{S = \bar{a}.b + a.\bar{b}}$$

Suivant le cas, il peut être préférable de considérer les 0 plutôt que les 1. On obtient alors l'équation du complément de S : $\bar{S}$

Simplification par TK 1/3

Table de vérité

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	$\boxed{1}$
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	$\boxed{1}$
1	1	1	$\boxed{1}$

$$S = \bar{a}.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$$

2

bc

Code Gray !

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	0	1	1

1

On regroupe les 1 adjacents. Le nombre de cases regroupées doit être une puissance de 2 (1, 2, 4, 8...). Les cellules des bords sont adjacentes (on replie le tableau comme une sphère).

Poue lire la valeur de chaque regroupement, **on conserve les bits qui ne changent pas !!** Dans ce cas, le groupe 1 correspond à ab. Le groupe 2 étant unique prend la valeur de la combinaison complète $\bar{a}bc$.

$$S = \bar{a}.\bar{b}.c + a.b$$

Simplification par TK 2/3

Le tableau de Karnaugh permet également de simplifier une équation donnée.

$$B1 = b.d + c.d + \bar{c}.d + a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.b.\bar{c}$$

On trace un TK à 4 entrées avec progression des combinaisons en code Gray.

Chaque terme est reporté dans le TK en appliquant la règle des bits inchangés.

On effectue les groupements et on déduit l'équation finale.

$$\boxed{B1 = a.b.\bar{c} + d}$$

d

ab \ cd	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1	1	1	
10		1	1	

$a.b.\bar{c}$

bd + cd + $\bar{c}d$ + $a.b.\bar{c}\bar{d}$ + $a.b.\bar{c}$

Simplification par TK 3/3

Nous pouvons vérifier par le calcul :

$$B1 = b.d + c.d + \overline{c}.d + a.b.\overline{c}.\overline{d} + a.b.\overline{c}$$

$$B1 = b.d + d\left(c + \overline{c}\right) + a.b.\overline{c}\left(\overline{d} + 1\right)$$

$$B1 = b.d + d + a.b.\overline{c}$$

$$B1 = d\left(b + 1\right) + a.b.\overline{c}$$

$$\boxed{B1 = d + a.b.\overline{c}}$$

Lois ou Théorème de De Morgan

Lois générales :

$$\overline{E(x1,x2,..,xn)+E(y1,..yn)} = \overline{E(x1,..xn)}.\overline{E(y1,.yn)}$$

$$\overline{E(x1,x2,..,xn).E(y1,..yn)} = \overline{E(x1,..xn)}+\overline{E(y1,.yn)}$$

Plus simplement avec 2 variables :

$$\overline{a+b} = \bar{a}\ .\ \bar{b} \qquad \overline{a.b} = \bar{a}+\bar{b}$$

Quelques exemples :

$$S = a+b.c \Rightarrow \bar{S} = \overline{a+b.c} = \bar{a}.\left(\overline{b.c}\right) = \bar{a}.\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}.\bar{b}+\bar{a}.\bar{c}$$

$$S = \overline{\bar{a}.\bar{b}+\bar{a}.\bar{c}} = (a+b)(a+c) = a.a+a.c+a.b+b.c = a.(1+c+b)+bc = a+b.c$$

Lois ou Théorème de De Morgan

De même, on peut démontrer les propriétés d'absorption :

$$\boxed{a.b + \bar{b} = a + \bar{b}}$$

$$S = a.b + \bar{b}$$

$$\bar{S} = \overline{a.b + \bar{b}} = (\bar{a} + \bar{\bar{b}}).b$$

De Morgan !

$$= \bar{a}.b + \bar{b}.b \qquad \bar{b}.b = 0$$

Complément !

$$= \bar{a}.b$$

$$S = \bar{\bar{S}} = \overline{\bar{a}.b} = \mathrm{a} + \bar{b}$$

De Morgan !

Simplification par la fonction XOR

Par définition la fonction XOR est : $\boxed{a \oplus b = a.\overline{b} + \overline{a}.b}$

Son complément est :

$$\overline{a \oplus b} = \overline{a.\overline{b} + \overline{a}.b} = \left(\overline{a} + b\right)\left(a + \overline{b}\right) = \overline{a}.a + \overline{a}.\overline{b} + a.b + b.\overline{b}$$

$$\boxed{\overline{a \oplus b} = \overline{a}.\overline{b} + a.b}$$

Exemple : Contrôle de parité

Deux parties commandes (Automate Programmable, ordinateur…) peuvent communiquer par une liaison série. A chaque mot envoyé, il convient de vérifier si le mot reçu est bien le même que celui envoyé par l'émetteur.

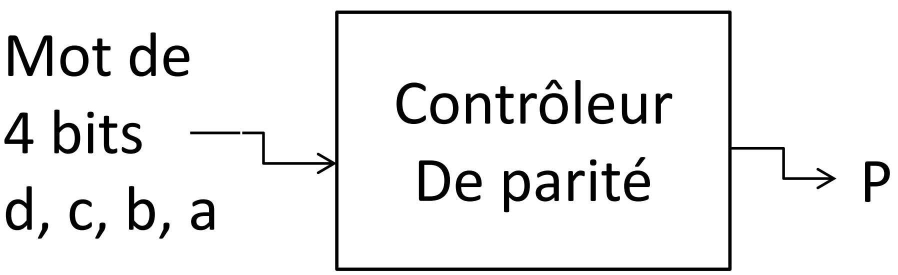
Une méthode consiste à envoyer après chaque mot un bit dit de parité qui signale si le mot est pair ou impair. Le récepteur vérifie si le mot reçu est conforme.

On appelle un mot pair un mot qui possède un nombre de 1 pair. Par exemple 3 (0011) est pair, 7 (0111) est impair.

L'étude se fera pour un mot de 4 bits, on notera **d, c, b, a** les 4 bits du mot, avec **a** le bit de poids faible.

Contrôle parité 1/2

La table de vérité du dispositif permettant de forcer un bit P à 1 si un mot de 4 bits (d, c, b, a) est pair est définie ci-contre.



Nous allons tracer le TK et en déduire l'équation simplifiée de P

	d	c	b	a	P
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Contrôle parité 2/2

$$P=\overline{d}.\overline{c}.\overline{b}.\overline{a}+\overline{d}.\overline{c}.b.a+\overline{d}.c.\overline{b}.a+\overline{d}.c.b.\overline{a}$$
$$+d.c.\overline{b}.\overline{a}+d.c.b.a+d.\overline{c}.\overline{b}.a+d.\overline{c}.b.\overline{a}$$
$$P=\overline{d}.\overline{c}.\left(\overline{b}.\overline{a}+b.a\right)+\overline{d}.c.\left(\overline{b}.a+b.\overline{a}\right)$$
$$+d.c.\left(\overline{b}.\overline{a}+b.a\right)+d.\overline{c}.\left(\overline{b}.a+b.\overline{a}\right)$$
$$P=\overline{d}.\overline{c}.\overline{\left(b\oplus a\right)}+\overline{d}.c.\left(b\oplus a\right)$$
$$+d.c.\left(\overline{b\oplus a}\right)+d.\overline{c}.\left(b\oplus a\right)$$
$$P=\left(\overline{b\oplus a}\right)\left(d.c.+\overline{d}.\overline{c}\right)+\left(b\oplus a\right)\left(\overline{d}.c.+d.\overline{c}\right)$$
$$=\left(\overline{b\oplus a}\right)\left(\overline{d\oplus c}\right)+\left(b\oplus a\right)\left(d\oplus c\right)=\overline{\alpha}.\overline{\beta}+\alpha.\beta$$
$$=\overline{\alpha\oplus\beta}\xrightarrow{avec}\alpha=b\oplus a\ ;\ \beta=d\oplus c$$

$$\boxed{P=\overline{b\oplus a\oplus d\oplus c}}$$

dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	0	1	0	1

Matrices incomplètes

Si, pour une combinaison d'entrées, la sortie associée peut prendre indifféremment l'état 0 ou 1, la case correspondant du tableau de Karnaugh est chargée par le symbole ensemble vide : ∅

On peut la considérer au choix comme un 0 ou un 1. Les groupements sont donc facilités, par les 1 comme par les 0.

= c

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	∅	1	∅
01	∅	0	∅	1
11	1	1	1	∅
10	∅	1	∅	1

= a

$\boxed{S = a + c}$

En groupant par les 0 : $\bar{S} = \bar{a}.\bar{c}$ D'où S = a + c (De Morgan)

Circuits intégrés logiques 1/4

Les portes logiques sont commercialisées sous forme de circuits intégrés. 2 technologies : TTL et CMOS.

Technologie TTL

Alimentation : 5V ± 5% (tension hors limite = destruction)

Consommation : 2mW pour la gamme LS

Entrée à 0 : si < 0,8V

Entrée à 1 : si > 2V

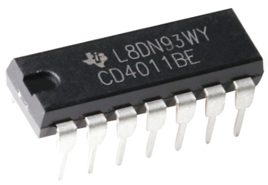
Courant de sortie : de l’ordre de 500µA (amplification !)

Temps de propagation : de l’ordre de quelques nS.

Circuits intégrés logiques 2/4

Technologie CMOS

Alimentation : 3V à 18V (Vcc)



Consommation : 0,1 mW

Entrée à 0 : si < 0,45 Vcc

Entrée à 1 : si > 0,55 Vcc

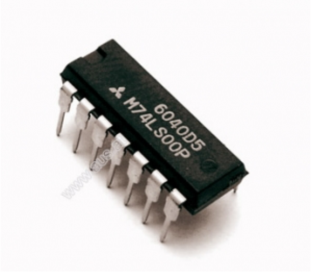
Courant de sortie : de l'ordre du mA.

Temps de propagation : de l'ordre de quelques dizaines de nS.

Circuits intégrés logiques 3/4

Technologie TTL :

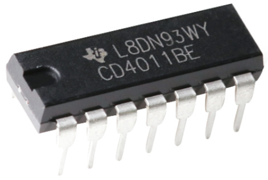
7400 -> Quadruple porte NON - ET à 2 entrées
7402 -> Quadruple porte NON - OU à 2 entrées
7404 -> 6 portes inverseuses
7408 -> Quadruple porte ET à 2 entrées
7413 -> Double porte NON - ET à 4 entrées
7420 -> Double porte NON - ET à 4 entrées
7428 -> Quadruple porte NOR à 2 entrées
7430 -> Porte NON - ET à 8 entrées
7442 -> Décodeur décimal BCD
7448 -> Décodeur BCD 7 segments
7470 -> Flip-Flop JK à 2 x 3 entrées
7482 -> Additionneur complet à 2 bits
7486 -> Quadruple porte OU Exclusif
7493 -> Compteur binaire
74121 -> Monostable
Etc ...



Circuits intégrés logiques 4/4

Technologie CMOS :

4001 -> Quadruple porte NON - OU à 2 entrée
4008 -> Additionneur 4 bits avec retenue
4011 -> Quadruple porte NON - ET
4016 -> Quadruple interrupteur bidirectionne
4023 -> Triple porte NON - ET à 3 entrées
4030 -> Quadruple porte OU – EXCLUSIF
4047 -> Monostable
4054 -> Driver pour afficheur 4 segments LCD
4068 -> Porte NON - ET à 8 entrées
4070 -> Quadruple porte OU – EXCLUSIF
4071 -> Quadruple porte OU à 2 entrées
4081 -> Quadruple porte ET à 2 entrées
4098 -> Double monostable re-déclenchable
4518 -> Double compteur décimal
4721 -> Mémoire vive 1 024 bits (256 x 4)
40195 -> Registre à décalage universel 4 bits
Etc...

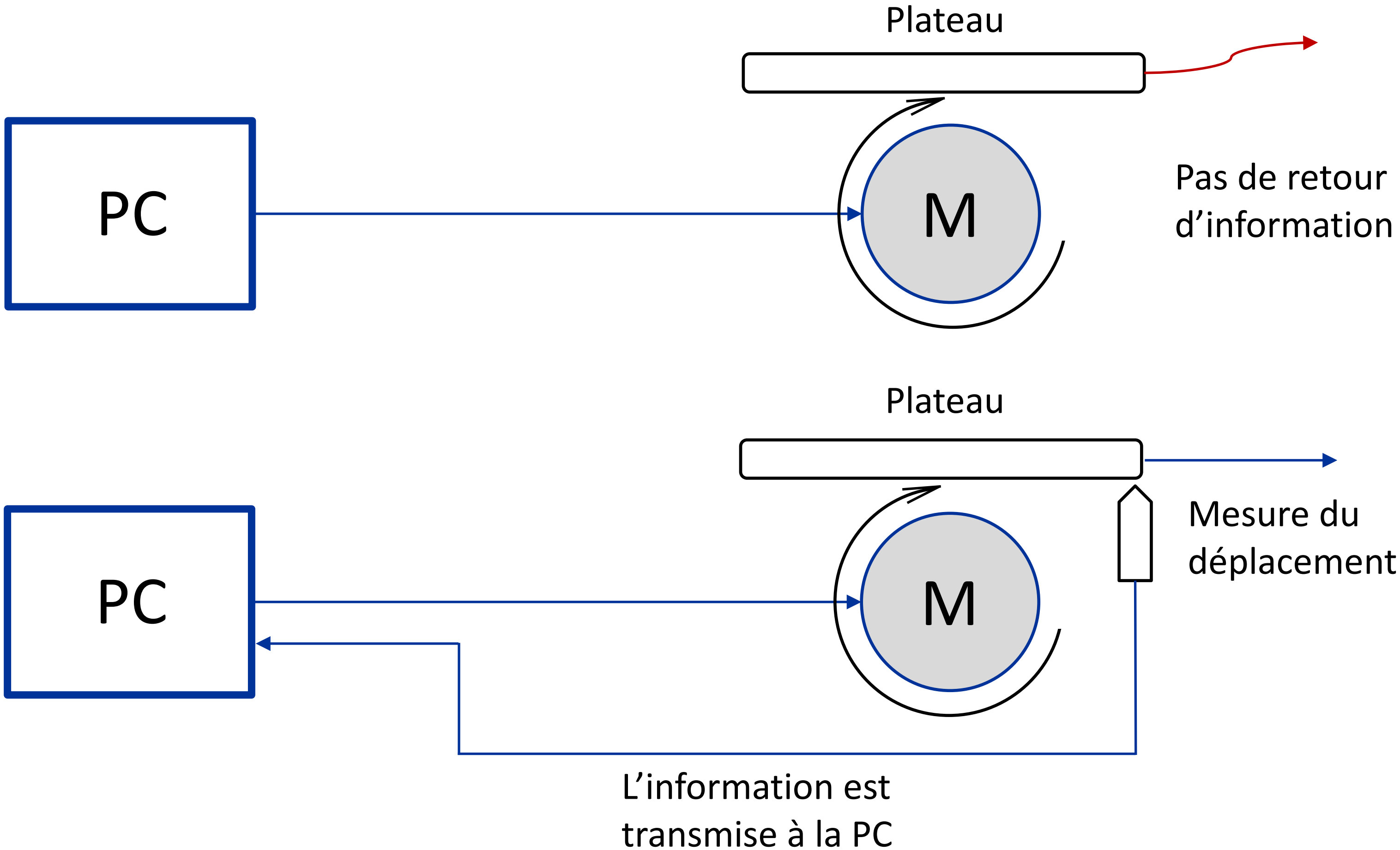


Boucle ouverte/fermée 1/2

Dans un **système en boucle ouverte**, la partie commande (PC) pilote les actionneurs mais ne reçoit pas d'informations précises sur leur état. C'est le cas des moteurs pas-à-pas des imprimantes 3D. La PC envoie un certain nombre de pas au contrôleur du moteur, mais ne reçoit pas l'information selon laquelle le moteur a bien tourné du nombre de pas émis. Ainsi le déplacement réel peut être différent de celui programmé.

Pour un positionnement précis, un dispositif de mesure renvoie à la PC le déplacement effectif produit par le moteur, il est alors possible de comparer les déplacements programmé et réel et de corriger les éventuelles erreurs. On parle dans ce cas d'un **système en boucle fermée**.

Boucle ouverte/fermée 2/2



Bouclage : ventouse de préhension

Une ventouse peut être utilisée pour « prendre » un objet. Lorsque la ventouse est en contact avec la surface de l'objet, un vide est réalisé par un système venturi alimenté par de l'air comprimée en provenance d'un distributeur. La ventouse étant étanche, le dispositif venturi doit être stoppé lorsque le vide est suffisant. On utilise un vacuostat (inverse d'un pressostat) qui fonctionne comme un interrupteur (Tout Ou Rien) et bascule lorsque le vide réglé est obtenu. La partie commande actionne le distributeur d'air du venturi (Q0 = 1) tant que la pression n'est pas atteinte (E0 = 0). Dès que E0 passe à 1, Q0 passe à 0.